DIAPO 1
Titre : Diagrammes et figures : aide ou obstacle pour l'éducation?

DIAPO 2
Plan de l'exposé

DIAPO3
Le logocentrisme

DIAPO 4

Le terme 'logocentrisme - que je veux utiliser pour parler du parti pris que la tradition a eu contre l'utilisation des diagrammes et des figures en mathématiques – a été introduit par Sheffer dans sa critique de la deuxième édition des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead.
Dans les quatre volumes des *Principia*, d'après Sheffer, les auteurs n'ont aucun intérêt pour l'épistémologie des mathématiques, mais que pour leur statut logique, c'est-à-dire, pour la question de la possibilité ou de l'impossibilité de dériver les mathématiques pures de la logique formelle.
Sheffer fait donc référence ici au logicisme, en tant qu'idée que les mathématiques doivent être fondées sur la logique. Mais aussi à l'approche logocentrique, selon lequel afin de rendre compte de la logique, il est d'abord nécessaire de présupposer et employer la logique même.

DIAPO 5

Dans un contexte tout à fait différent, qui s'éloigne du débat sur les fondements des mathématiques, le terme logocentrisme a été repris par Barwise et Etchemendy pour définir ce qu'ils considèrent le 'dogme' de la vision standard des mathématiques. Selon cette vision, la question la plus importante pour les mathématiques consiste à donner des démonstrations des énoncés mathématiques. Ces énoncés sont à leur tour des objets syntaxiques qui consistent seulement de propositions disposées dans une façon finie et contrôlable, passible d'être examinée.

D'un problème des fondations à un 'dogme' qui concerne la notion de démonstration. Qu'est-ce qui reste de l'épistémologie des mathématiques? Qu'en est –il des outils mathématiques, tels les diagrammes, qui ne rentrent pas, à l'apparence, dans ce programme logiciste ou logocentriste ?

DIAPO 6

Un groupe de logiciens s'est occupé d'évaluer la dimension logique des diagrammes. Leur objectif était de créer des systèmes permettant la formalisation rigoureuse des diagrammes, avec le but de montrer qu'il est possible d'élargir la logique d'une façon telle qu'elle inclue aussi bien les représentations linguistiques que les représentations visuelles. Les formes visuelles de représentation ne sont donc pas considérées seulement comme des outils heuristiques et pédagogiques, mais aussi comme des éléments propres aux démonstrations mathématiques.

Barwise et Etchmendy, selon ce que Shin raconte dans sa reconstruction, ont travaillé à ce projet après avoir observé l'exécution de taches chez un groupe d'étudiants. Ils avaient remarqué que la compréhension de concepts sémantiques peut être une aide pour la réalisation de démonstrations formelles dans un système déductif. En fait, selon ces auteurs, le raisonnement est une activité hétérogène: on utilise différentes formes de représentations de l'information quand on raisonne, et, souvent, ces représentations ne sont pas sous forme de propositions, mais, par exemple, de diagrammes. Ces logiciens ont commencé à travailler sur leur projet avec l'objectif de réconcilier un conflit apparent entre ce qui se passe dans notre raisonnement ordinaire et ce qui a été fait en logique et en mathématiques. Aussi, de combiner les mérites de deux pôles possibles du raisonnement: d'un coté, il y a le pouvoir pratique du raisonnement multi-modale ; de l'autre la logique moderne et sa formalisation avec sa rigueur. Associer les deux signifie obtenir l'unité d'enseignement et recherche. La motivation de Barwise et Etchemendy consistait donc, comment je l'ai dit toute à l'heure, à élargir la logique d'une façon telle qu'elle puisse se libérer de l'idée qu'il y a seulement un mode de représentation qui lui est propre.

Pourtant, cette approche présente deux problèmes.

DIAPO 7

Le premier problème apparaît dans cette citation de Shin, où elle explique que nous nous engageons tous et nous utilisons tous des formes de raisonnement valide. Aussi dans le processus de raisonnement nous obtenons des informations à travers beaucoup de moyens qui sont les plus différents et qui peuvent inclure non seulement des énoncés, mais aussi des diagrammes, des cartes, des odeurs, des sons. Pourtant (et cette objection anticipe les difficultés qu'on retrouvera dans le cas de l'utilisation des diagrammes et des figures en éducation), ce n'est pas évident que quand on parle de raisonnement valide et de processus de raisonnement, on parle de la même chose. Au contraire, on devrait distinguer la validité, en tant qu'élément qui n'est pas directement lié au processus de raisonnement, mais qui est lié aux règles qui déterminent ce qu'une théorie particulière impose comme valide ou pas valide. On reviendra ensuite sur ce point.

DIAPO 8

Le deuxième problème est que les deux auteurs affirment que leur intention est celle de traiter le raisonnement visuel/spatial dans une façon similaire celle par laquelle Frege et ses disciples ont traité le raisonnement formel/linguistique.

Ils montrent ainsi d'être encore très pris par des préoccupations qui sont typiques de la discussion traditionnelle sur les fondements des mathématiques. En effet, l'objectif de Shin est de fournir un nouveau système standardisé qui n'utilise pas seulement des énoncés mais aussi de diagrammes qui sont tout à fait rigoureux. Ce n'est pas clair du tout comment donner une syntaxe et une sémantique explicite pour les diagrammes, et donc une logique diagrammatique qui emploie des énoncés linguistiques mais aussi des diagrammes, qui puisse expliquer ce que sont que les propriétés structurelles des système diagrammatiques, et ceci non seulement pour les diagrammes de la logique de première ordre, mais pour les systèmes diagrammatiques en général. Par exemple, c'est très difficile d'appliquer cette stratégie aux cas où la représentation est un phénomène plus complexe de ce qu'on rencontre dans des systèmes de propositions; en effet, les approches logiques doivent être élargis pour comprendre aussi ces cas. On peut penser que c'était seulement le premier pas dans la réalisation d'un projet plus ambitieux, mais en tous cas, je crois que Mancosu a raison quand il dit que ces auteurs n'ont rien à dire sur le critères pour distinguer entre systèmes diagrammatiques d'un coté et systèmes linguistiques de l'autre.

Pourtant, c'est vrai que l'idée de rendre la logique plus ample par rapport à l'idée de logique qui a été transmise par la tradition est tout à fait intéressante.

DIAPO 9

Un mathématicien très connu, Giancarlo Rota, a suggéré qu'on doit repenser la logique : les lois de la logique ne sont pas sculptées dans la pierre, éternelles et immuables ; quand on considère le développement des mathématiques on s'aperçoit que les raisons d'un théorème ne sont trouvées qu'après une recherche approfondie qui se concentre sur la possibilité même du théorème. C'est la découverte de ces raisons qui étaient cachées le travail propre d'un mathématicien. Peu importe si après on choisit de les exprimer par des énoncés formels particuliers : on peut trouver différentes versions équivalentes d'un même théorème, et ça dépend de facteurs contextuels. L'identification des mathématiques avec un certain style d'exposition a comme résultat que les mathématiques s'éloignent des autres sciences.

On trouve ici un autre aspect intéressant pour les questions d'éducation. On a vu déjà les questions de validité par rapport aux différents processus de raisonnement; on trouve maintenant la question de la découverte des raisons d'un théorème, qui, peut être, ne coïncident pas avec la reconnaissance de la validité d'un théorème, ni avec les processus de raisonnement engagés pour le comprendre.

DIAPO 10

En tous cas, il n'est pas difficile de reconnaître que les conceptions 'logocentriques' des mathématiques se sont révélées inappropriés pour la description des mathématiques en tant que science dynamique. Ces positions ont causé un éloignement de ce qu'on considère d'un coté comme l'histoire des mathématiques, et de l'autre comme les processus réels de raisonnement qui sont en jeu quand on fait des mathématiques.

Dans le cas de l'historie, Corfield a défini comme 'foundational filter' l'attitude qui n'a pas permis aux philosophes de prendre en considération ce qui se passe dans les mathématiques contemporaines, et ce qui s'est passé dans l'historie des mathématiques précédente au vingtième siècle.

Dans le cas des processus de raisonnement, Wertheimer déjà disait que dans les mathématiques comme dans la logique la tendance standard était (on est au début du vingtième siècle) de réduire la logique à un jeu gouverné par des règles fragmentaires combinées dans une façon arbitraire. Cette attitude marche bien quand le but est celui de trouver de critères de validité logique au sens strict et donc rigide. Néanmoins, cette tendance ne sert pas à évaluer ce que c'est que la compréhension des mathématiques et la productivité mathématique.

On a donc deux choix possibles si nous voulons étudier les dynamiques des mathématiques, par exemple la notion d'explication, qui revêt un intérêt particulier pour l'éducation: on peut choisir une approche historique, ou bien une approche cognitive. Je vais discuter la deuxième choix.

DIAPO 11

D'abord, je vais présenter une opération qui fait partie de l'approche cognitive, mais que je considère être trompeuse. L'exemple est pris de la logique, mais je crois que le même type de critique peut être appliquée aussi aux lectures similaires d'autres cas plus mathématiques. Encore, je pense que cette critique montre aussi quelque chose qu'on doit considérer quand on parle de diagrammes et figures en mathématiques.

Donc, l'exemple particulier est un diagramme de Venn. Ces diagrammes sont utilisés massivement pour l'enseignement de la logique, parce qu'ils semblent très utiles pour apprendre les circonstances sous lesquelles certaines, simples relations entre des ensembles tiennent. On peut avoir bien sûr des points de vue différents sur les diagrammes de Venn et sur comment ils marchent.

D'après les conceptions logocentriques, ce diagramme est seulement une aide heuristique qui provoque une certaine série d'inférences, mais est *dispensable* comme outil démonstratif.

DIAPO 12

Lakoff a une idée différente. Il soutient qu'une conception formaliste des mathématiques (selon laquelle un ensemble est une structure mathématique qui satisfait les axiomes de la théorie des ensembles) ne rend pas compte de la façon dont normalement on parle des ensembles. En fait, selon Lakoff, on parle des ensembles comme si ils 'contenaient' leurs membres; même le choix du terme 'membre' fait référence à cette idée de contenir. Néanmoins, il n'y a rien dans les axiomes qui caractérise les ensembles comme des récipients, ou qui définit ce que c'est qu'un récipient. Selon Lakoff, les mathématiques commencent avec l'expérience humaine, et la métaphore joue un rôle crucial, parce qu'elle implique le transfert des idées entre des domaines différents. SI les ensembles sont conceptualisés selon le schéma-confinement, il y a une contrainte qui suit automatiquement, et qui par contre ne suit pas des axiomes: les ensembles ne peuvent pas être membres d'eux mêmes. Pour écarter cette possibilité, de nouveaux axiomes doivent être introduits, comme de nouvelles métaphores pour penser les ensembles, à partir de la métaphore de base selon laquelle on peut penser aux classes comme à des récipients. Après une série suffisante de couches, la grille conceptuelle originelle est oublié.

Ce que Lakoff raconte est donc que, quand on considère les diagrammes de Venn, c'est en vertu de notre schéma-confinement que nous sommes capables de saisir leur signification. Néanmoins, cette idée est trompeuse. Considérez par exemple la relation représentée ici : celle d'avoir une intersection qui n'est pas vide. Comment peut-on utiliser ce schéma pour comprendre sa signification? En plus, quand bien même les diagrammes de Venn seraient semblables à d'autres genres de diagramme logiques (comme par exemple les cercles d'Euler), ils ne partageraient pas avec eux la même signification. Plus précisément, les diagrammes de Venn sont introduits pour neutraliser les limites expressives qui sont propres au système de représentation d'Euler. Donc, le point de vu de Lakoff semble simplifier à l'excès notre utilisations des diagrammes, et semble aussi se concentrer sur les contraintes perceptives des diagrammes, en sous-estimant le rôle joué par d'autres facteurs comme par exemple l'interprétation.

Si on revient encore à Barwise et Etchmendy, ils suggèrent, comme je l'ai déjà en précédence, de fournir un formalisme, c'est-à-dire, un système standardisé de représentations et de règles pour les manipuler. J'ai déjà expliqué que cette manœuvre, même si elle peut être appropriée ici, n'est pas vraiment généralisable.

DIAPO 13

Une tentative cognitive plus prometteuse est celle de Stenning et Lemon (2001), qui distingue entre efficacité de calcul (qui corresponde à une très bas complexité d'inférence), et efficacité expressive, qui dépend de propriétés sémantiques comme la consistance ou de restrictions sur la classe de structures représentables. Les diagrammes sont généralement inexpressifs, mais leur aspect mène à la facilité inférentielle.

Les restrictions expressives sur les systèmes représentationnels viennent de l’interaction entre les contraintes topologiques et géométriques de la surface bidimensionnelle et les interprétations des diagrammes. On a les deux aspects. Donc, c’est plutôt la nature des interprétations du médium et pas le médium en lui même qui détermine les différences réelles entre les systèmes de représentation.

DIAPO 14

Si on considère le problème de cette manière donc, on trouve qu’on a de différentes questions à aborder: la question de la validité, celle de la généralité, encore celle de l’interaction avec le langage (c’est-à-dire, quand on doit démontrer quelque chose, on part tout à fait d’énoncés linguistiques). Mais ce que j’espère avoir montré est que quand on utilise des diagrammes, le regard ne suffit pas, parce que ce n’est pas un cas de ‘voir’ au sens propre, et ce n’est pas du tout une manière facile d’obtenir des informations par la vision.

On passe maintenant à la deuxième partie de l'exposé, où je vais discuter un peu plus directement ces questions par rapport à l'éducation.

En fait, dans ce contexte, une question à discuter concerne le rôle des diagrammes dans l'éducation mathématique, par rapport au but de donner une importance plus grande au raisonnement visuel, comparable à celle du raisonnement analytique. Est-ce que c’est possible de retrouver aussi dans l'enseignement de la logique et des mathématiques de formes de ‘logocentrisme’? Certains textes d'éducation suggèrent que c’est nécessaire de passer de l'époque du ‘sage on the stage’ à la nouvelle âge de la ‘guide on the side’. Mais si c’est ça le cas, qu’est-ce que cela signifie, et qu’est-ce que cela implique?

DIAPO 15-16-17

Polya s’est occupé en 1945 de répondre à la question: comment peut-on résoudre un certain problème. La résolution d’un problème consiste en quatre phases: on doit
comprendre le problème
faire un plan
réaliser le plan
et enfin se retourner pour regarder ce qu’est passé et pour le contrôler.

Selon Polya, l’exposition qui progresse implacablement des données à ce qui n’est pas connu, c’est-à-dire, des hypothèses aux conclusions, est parfaite pour contrôler l’argumentation en détail mais n’est pas du tout parfaite pour rendre compréhensible la ligne principale de l'argumentation.

Ce premier point de vue soutient donc qu’en utilisant des figures, on a accès à la compréhension du résultat, mais on perd la rigueur et la justification de notre raisonnement: le raisonnement diagrammatique dépend malgré tout de la formalisation qui reste nécessaire, même si elle vient après le raisonnement informel.

Mais Polya dit aussi une chose qui est très raisonnable, c’est-à-dire, qu’un détail qui est imaginé peut être oublié, mais le détail qui est tracé sur le papier reste, et quand on revient sur lui, il nous rappelle des remarques que on avait fait et par conséquent c'est grâçe à ce détail que on a moins de difficulté à nous souvenir nos considérations précédentes.

DIAPO 18

On a pas mal de questions à discuter quand on considère comment les diagrammes et le figures peuvent être utiliser dans l'enseignement: Quand peut-il un diagramme être précis et exact? Les dessins faits à la main peuvent-ils être plutôt sommaires, mais sont-ils encore intelligibles ? Les diagrammes peuvent-ils être accompagnés par des étiquettes et des énoncés ? Quand est-ce qu'on peut dire que les diagrammes soutiennent le raisonnement?

Certaines études soulignent la variété des explications mathématiques et le rôle que la visualisation joue dans ces explications. Reste néanmoins à résoudre la tension entre 'rendre les choses plus faciles' pour les étudiants et les aider à apprendre, c'est-à-dire la tension entre utiliser des systèmes diagrammatiques pour aider la compréhension ou bien pour obtenir un degré suffisant de généralisation.

DIAPO 19

Je vais aborder la question en trois phases, et je vais présenter des études empiriques qui ont été donnés.
Première question: opérer sur l'image de l'énoncé
Deuxième question: avoir une référence concrète
Troisième question: apprendre une pratique

DIAPO 20

Le premier problème à considérer pour l'enseignement des mathématiques est de voir qu'est-ce qui se passe quand les étudiants utilisent les diagrammes ou la figures pour raisonner sur un théorème, mais ils ne se rendent pas compte qu'ils sont en train de raisonner sur les images du théorème, c'est-à-dire, justement sur les diagrammes et sur le figures, et non sur le théorème dans sa généralité. Par rapport à ce que j'ai dit dans la première partie, cela veut dire qu'ils considèrent seulement les contraintes perceptives des diagrammes mais pas vraiment leur interprétation.

Dans un article Bråting et Pejlare discutent certaines idées de Felix Klein relatives aux limites de notre intuition spatiale. En 1873, Klein distinguait entre intuition 'naïve' et intuition 'raffinée' pour expliquer ces limites. L'intuition naïve est définie comme un intuition qui peut être faillible et inexacte. Par exemple, si on imagine une ligne, c'est pour nous impossible de l'imaginer 'sans épaisseur', parce que on est forcés d'imaginer un signe d'une longueur qui correspond à la définition mathématique seulement si on accepte une certaine approximation. Mais c'est seulement ce type d'intuition qui est assujetti aux limites de la visualisation. L'intuition raffinée est par contre la déduction logique à partir des axiomes qui sont considérés comme des vérités exactes. Ces axiomes pourtant, et dans ceci Klein semble s'éloigner du logocentrisme, ne sont pas arbitraires, ni des vérités a priori, mais constituent un développement à travers une idéalisation des données inexactes qu'on reçoit à travers l'intuition naïve. Le raisonnement informel joue donc un rôle dans la pratique mathématique et surtout dans la découverte: les mathématiques ne coïncident pas avec la logique.

DIAPO 21

Bråting et Pejlare ont par but celui d'évaluer cet élément informel et faillible et de mettre en évidence le rôle de la maîtrise de ce que j'ai défini « les contraintes interprétatives ». Est-ce que les étudiants ont des difficultés à voir une conclusion mathématique correcte dans une représentation visuelle? Ils prennent 'flocon de neige' de von Koch, le mathématicien suédois qui a élaboré une visualisation d'une fonction continue et non dérivable en aucun point dont Weierstrass avait donné une formalisation. Von Koch n'était pas satisfait de cette version analytique de la fonction, parce que selon lui elle ne respectait pas sa nature géométrique fondamentale. Pour lui, c'était impossible de comprendre quelque chose, et au même temps de ne pas le voir. Avec le flocon de neige, par contre, on peut la représenter visuellement, et par conséquent voir qu'elle est continue et non dérivable en aucun point: c'est l'intuition naïve de Klein que nous permet de comprendre que c'est impossible de tracer la tangente en aucun point de la courbe.
Par contre, selon Bråtinge e Pejlare, si on n'est pas familier avec l'existence de fonctions continues mais non dérivables, on a sans doute des difficultés à envisager cette impossibilité, même si on fait référence à la représentation visuelle.

Voilà ce qui se passe avec 39 étudiants universitaires en mathématiques, qui reçoivent cette tache.

Considérez la construction qui suit

Prenez un triangle équilatéral de côté 1.
Sur la troisième partie de chaque côte, construisez un triangle équilatéral de côté 1/3. Supprimez la base de chacun des 3 nouveaux triangles.
Sur la troisième partie centrale de chacun des 20 triangles, construisez un triangle équilatéral de côté 1/9. Supprimez la base de chacun des nouveaux 20 triangles.
Répétez ce processus avec la figure de 48 côtés que vous avez obtenu.

Répondez à ces questions de manière la plus exacte possible :
1. Jusqu'à quand peut-on répéter ce processus?
2. Quelle figure obtient-on à la fin? Une figure continue? Une figure dérivable?

Je vous rappelle que cette courbe a la propriété de l'auto-similitude, c'est-à-dire qu'a chaque trait, si agrandi, on visualise un ensemble de particuliers autant riche et complexe que le précédent, et ce processus peut continuer à l'infini. Pour cette raison le flocon de neige est continu mais il n'admet pas une tangente unique en aucun point: chaque partie du flocon, même la plus petite, a la propriété de l'auto-similitude, c'est-à-dire elle contient une richesse de particuliers et de minuscules flocons de neige.

DIAPO 22

Les résultats de cette étude montrent que la majorité des étudiants n'a pas de problème avec la première question. Les problèmes arrivent avec la deuxième, qui donne lieu à des réponses très différentes. 16 étudiants pensent que la figure limite est uniforme partout ou à l'exception d'un certain nombre fini de points. 7 des 16 répondent qu'il s'agit d'un cercle ou d'un carré, et 9 d'une 'fleur'. Un étudiant de ces 9 commente que les extrémités qui viennent d'être construites avec ce processus deviennent infiniment petites et donc qu'ils donneront lieu à une courbe uniforme, continue et dérivable. 14 étudiants ne pensent pas que la figure au limite soit uniforme partout, et ils montrent d'avoir familiarité avec la courbe flocon. Les 9 étudiants qui restent ne donnent pas de réponse pertinente.

Les deux expérimentatrices concluent que, même si les étudiants connaissent les concepts mathématiques de continuité, dérivabilité, convergence, la grande partie d'entre eux n'est pas capable de résoudre le problème du 'flocon de neige'. Donc, il n'est pas suffisant de connaître les définitions mathématiques, on doit connaître aussi comment les utiliser pour visualiser. Par conséquent, ce n'est pas vrai que la visualisation permet toute seule et tout de suite de voir que la fonction est continue mais non dérivable en aucun point. En plus, l'étudiant qui dit que la figure limite est uniforme, continue et dérivable, montre justement de confondre la figure sur le papier avec l'objet mathématique, parce qu'il pense que les extrémités vont devenir si infiniment nombreuses et si infiniment petites qui la courbe va s'uniformiser et le singularités vont disparaître.

DIAPO 23

Le deuxième problème à considérer est la question d'avoir une référence concrète pour nos raisonnements.

Fischbein, qui a travaillé sur l'intuition en mathématiques et en sciences en général, discute le fait que dans le raisonnement mathématique on a, d'un côté la recherche d'un modèle idéal, et de l'autre, les contraintes concrètes, psychologiques. Ce fait crée une tension. Son hypothèse est que dans certains cas, il est possible d'introduire des interprétations qui ont du sens par rapport au comportement ou aux habitudes qui on a. Cependant, si on introduit des objets concrets pour traiter des objets abstraits, on doit être attentifs à n'appliquer pas à ces objets de types de manipulations qui sont propres aux objets concrets en question, et qui ne correspondent à aucune des manipulations des objets abstraites qu'ils représentent. L'intuition est un type particulier de cognition, c'est notre manière naturelle de traiter des conditions mathématiques de la même manière dont on traite des conditions plus pratiques et plus empiriques. Cette intuition ne passe pas par le langage. Le système des mathématiques souffre de stérilité si on ne considère pas cette intuition; cependant, ces représentations visuelles peuvent amener les étudiants à faire des erreurs.

DIAPO 24

Considérons deux axes parallèles X et Y, et dessinons les deux lignes parallèles AB et CD perpendiculaires à X et Y. On appelle a la distance constante entre AB et CD. On dessine les deux courbes EF et GH telles que la distance entre deux points correspondants, mesurée sur une ligne parallèle aux axes X et Y, reste constante et est égale à a.

Fischbein a demandé à ses sujets de comparer les aires des figures ABCD et EFGH. En général, ils ont répondu que l'aire de EFGH est plus grande que l'aire de ABCD, et ils ont insisté que la raison était que EFGH était 'plus longue'. Les aires sont par contre équivalentes.

Selon Fischbein, cet exemple rappelle l'expérience de Piaget avec la boule d'argile et la réaction de non conservation par les enfants pre-opérationnels. Si on prend une boule d'argile et on la roule jusqu'à quand elle devient une longue baguette étroite, ou si on la déchire en dix petites pièces, l'enfant pre-opérationnel (de moins de sept/huit ans donc pour Piaget) ne va pas comprendre qui il s'agit toujours de la même quantité d'argile. L'analogie entre ces deux interprétations erronées est expliquée par Fischbein. Il soutient que dans les deux problèmes, celui de l'aire et celui de la boule, les sujets se focalisent sur une seule dimension - la longueur - qui devient dominante. Par contre, ils ne considèrent pas suffisamment la dimension de la profondeur.

DIAPO 25

Ce type d'éléments perceptifs est très important, parce qu'ils causent une contradiction profonde entre ce qu'il définit la nature des mathématiques, d'un côte, et la nature du raisonnement mathématique de l'autre. En fait, les aspects pratiques ne sont pas un critère pour accepter quelque chose comme mathématiquement valide: par contre, la validité mathématique dépend de la possibilité de définir cette chose et de l'utiliser en respectant la cohérence dans le domaine des structures axiomatiques. Bien sûr croyances, attentes, suggestionnes picturales, analogies, paradigmes, ne sont pas seulement des résidus de formes plus primitives de raisonnement, mais des composantes propres du raisonnement mathématique et scientifique en général. Ils sont aussi des éléments très productifs, et des ingrédients actifs de tous les types de raisonnement. Selon Fischbein, sans la possibilité d'avoir une intervention directe par l'information empirique, la plus grande partie des sujets ne serait pas capable de faire référence spontanément à ses propres schémas logiques pour tirer des conclusions formelles correctes.

Les diagrammes contribuent à l'organisation de l'information dans une façon globale en représentations synoptique, e constituent un important facteur de globalisation, mais ils sont quand-même de structure post-conceptuelles.

Une dernière chose intéressante à propos de sa définition de diagrammes que je vais évaluer toute à l'heure, est celle de diagrammes comme outils d'anticipation, parce qu'ils sont des représentations constructives et dynamiques qui aident à transformer le problème en un problème de composition figurative.

DIAPO 26-27-28

Dans le contexte plus récent, on fait souvent référence à la cognition située. On revient à Barwise et Etchmendy, qui ont crée de logiciels, le premier appelé *Tarsky's World*, le deuxième *Hyperproof*, qui constituent de micro-mondes d'objets conçus pour enseigner la logique de premier ordre. *Hyperproof* ajoute au logiciel qui le précède la possibilité d'enseigner non seulement la syntaxe et la sémantique, mais aussi l'inférence, parce qu'il incorpore des règles de raisonnement hétérogènes, qui peuvent continûment déplacer l'information des représentations graphiques de ce monde-là, habité par des blocs de propositions de la logique du premier ordre.

C'est en fait ce type de 'concrete-world' situations que Stenning, Cox et Oberlander ont testé. Ce qu'ils veulent étudier était la chose suivante: Est-ce que le raisonnement peut être enseigné? Qu'est-que c'est la représentation graphique et à quoi sert-elle? E encore, à propos de la compréhension et aussi de la capacité à faire de transferts: est-ce que travailler en faisant attention au raisonnement multi-modal facilite le raisonnement analogique ou les transferts conceptuels?

Ils décident aussi d'ajouter l'effet d'enseignement en utilisant une méthode syntaxique et par conséquent conventionnelle sur les performance des étudiants dans le test GRE (graduate record exam), et de la comparer à *Hyperproof*. Ce test, qui est purement verbal, contient deux types de tâches. Un premier type de tâche est constitué par les problèmes ainsi nommés 'déterminés', qui selon les auteurs correspondent à l'application du raisonnement 'analytique'; le deuxième type de tâches sont les problèmes indéterminés, qui correspondent à l'application du raisonnement 'logique'. Les sujets sont regroupés par rapport à la méthode d'enseignement et à leur performance dans le GRE. Ils sont testés en deux phases, avant le cours et après le cours.

DIAPO 29

D’abord, voici les résultats. Dans une première expérience ils on montré les effets du training par rapport aux styles cognitifs. Les sujets étaient classifiés comme Det Hi/Lo sur la base de leur résultat dans les tâches analytiques de GRE (le facteur est le ‘niveau de détermination (determinacy)’)

Selon les auteurs, ces résultats montrent qu’il y a tout à fait un bon transfert d’apprentissage dans les cas des deux méthodes, celui conventionnel et celui basé sur *Hyperproof*, mais il y a des interactions très fortes entre les méthodes d'enseignement et les différences individuelles qui pré-existent. Les tendances des étudiants retrouvées dans les résultats renforcent l’idée que l'enseignement syntaxique peut en effet interférer avec le raisonnement qui se base sur la ‘construction de modèles’ et qui est tout à fait important en dehors des leçons de logique conventionnelle et dans l’application même de la logique. *Hyperproof* semble capable d'améliorer les performances des étudiants qui sont déjà forts avec ce genre de raisonnement mais n’aide pas vraiment les étudiant plus faibles.

En plus, le fait que la performance dans le monde des blocs et le raisonnement analytique du GRE diffère est probablement du au fait qu’on a, d’un côte, des diagrammes qui sont présentés, visibles sur l’écran, et de l’autre côté des tâches qui font référence à une vraie construction mentale des modèles. Ceci dit peut être quelque chose sur les différents processus mentaux qui ont lieu dans les deux cas.

Ils suggèrent aussi que, peut être, sur la base de ces résultats ce serait le cas de penser à un ‘domain-independent graphics curriculum’ pour encourager les étudiants à élargir leur répertoire représentationnel.

DIAPO 30

Le troisième aspect que je vais aborder et avec lequel je vais conclure est mon idée d’un possible curriculum d’études uniquement dédié au raisonnement diagrammatique. Cette idée est que ce qui est en jeu n’est pas un ensemble de règles plus ou moins explicites mais un ensemble de procédures. En fait, ce qu’on apprend ou qu’on peut enseigner par rapport aux diagrammes sont de pratiques de manipulation.

Donc, l’antidote contre le logocentrisme n’est pas de donner de règles explicites ou encore de passer de l’autre côté, et de croire à l’opposition du linguistique et du visuel, mais par contre de voir comment le lien avec le langage reste parce qu’il y a une interaction continue avec le langage ; mais la chose la plus pertinente est la manière dont les diagrammes et les figures sont manipulées pour faire une inférence et obtenir une conclusion.

Comme on a vu en Fischbein, un diagramme est dynamique quand il implique une certaine procédure et ainsi apporte une expérimentation en appliquant une certaine procédure. Les inférences informelles prennent en fait la forme de transformations, mais seulement certaines entre toutes les transformations possibles résultent légitimes. C’est quand on sait, on voit, on reconnaît quelles manipulations sont légitimes, qu’on peut dire qu’on connaît le fonctionnement du système de représentation. Les règles des systèmes diagrammatiques sont normalement extériorisées comme des procédures. Par conséquent, on n’apprend pas une manipulation singulière mais plutôt un ensemble de procédures, pas des règles abstraites mais des instructions pour agir sur le diagramme et le lire et interprété correctement.

J’arrive finalement à mes conclusions.

DIAPO 31

J'espère d'avoir montré que la question relative à l'utilisation des diagrammes est plus compliquée que ce qu'on retrouve en littérature. On a continûment des interactions qui sont compliquées à évaluer par rapport à l'éducation aux mathématiques. Ces interactions sont des interactions entre les contraintes perceptive et les interprétations possibles d'un diagramme, et aussi entre les capacités individuelles et les méthodes d'enseignement. Tout ça va vers la direction d'une tentative d'améliorer les capacités de raisonnement multi-modal chez les étudiants, mais on a encore pas mal de recherche à faire pour comprendre quelles sont les meilleures directions à prendre.